

Questão 1

- a) Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1000?
 b) Quantos múltiplos de 9 ou 15 há entre 100 e 1000?

Resposta

a) Como $99 = 9 \cdot 11$ e $1\ 000 = 9 \cdot 111 + 1$, há 11 múltiplos positivos de 9 menores que 100 e 111 múltiplos positivos de 9 menores ou iguais a 1 000. Assim, há $111 - 11 = 100$ múltiplos de 9 entre 100 e 1 000.

b) Sejam A e B os conjuntos dos múltiplos de 9 e 15 entre 100 e 1 000, respectivamente. O número de múltiplos de 9 ou 15 é $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Do item a, $n(A) = 100$. Como $99 = 15 \cdot 6 + 9$ e $1\ 000 = 15 \cdot 66 + 10$, $n(B) = 66 - 6 = 60$.

O conjunto $A \cap B$ é formado pelos múltiplos de $\text{mmc}(9; 15) = 45$ entre 100 e 1 000. Como $99 = 45 \cdot 2 + 9$ e $1\ 000 = 45 \cdot 22 + 10$, $n(A \cap B) = 22 - 2 = 20$.

Portanto há $n(A \cup B) = 100 + 60 - 20 = 140$ múltiplos de 9 ou 15 entre 100 e 1 000.

Questão 2

Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

Resposta

Sejam x , y e z as quantidades de caixas de maçãs, peras e laranjas, respectivamente. Assim:

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ 50x + 60y + 100z = 10\ 000 \\ 20x + 40y + 10z = 3\ 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ \Leftrightarrow 5x + 6y + 10z = 1\ 000 \\ 2x + 4y + z = 330 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ \Leftrightarrow y + 5z = 300 \\ 2y - z = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ \Leftrightarrow y + 5z = 300 \\ -11z = -550 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40 \\ \Leftrightarrow y = 50 \\ z = 50 \end{cases}$$

Portanto estão sendo transportadas $40 \cdot 50 = 2\ 000$ maçãs, $50 \cdot 60 = 3\ 000$ peras e $50 \cdot 100 = 5\ 000$ laranjas.

Questão 3

a) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular $m > 0$. A circunferência C passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(3, 0)$ e tem centro no eixo x . Para qual valor de m a reta r é tangente a C ?

b) Suponha agora que o valor de m seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de intersecção de r com C .

Resposta

a) Como a circunferência C tem centro no eixo x e passa pelos pontos $(1; 0)$ e $(3; 0)$, seu centro é dado por $\left(\frac{1+3}{2}; 0\right) = (2; 0)$ e, então, seu raio é 1.

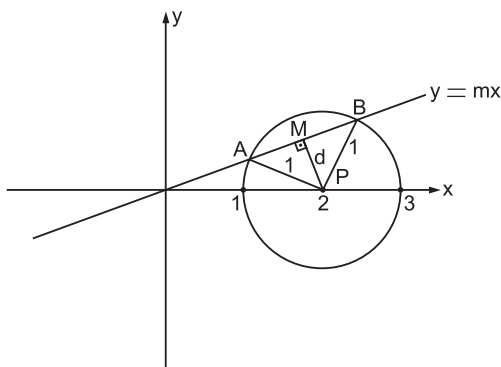
Uma equação de r é $y = m \cdot x \Leftrightarrow mx - y = 0$. Para que a reta r seja tangente a C , devemos ter

$$\frac{|m \cdot 2 - 0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } m = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Já que $m > 0$, temos $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Suporemos $m > 0$.



Sejam A e B os pontos de intersecção da reta $y = mx$ com a circunferência e M o ponto médio de \overline{AB} .

A distância do centro $P = (2; 0)$ da circunferência

$$\text{à reta é } d = \frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

O triângulo APM é retângulo em M, logo

$$AM^2 + MP^2 = AP^2 \Leftrightarrow AM^2 + \frac{4m^2}{1+m^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM = \sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}.$$

Conseqüentemente, a área de PAB é $\frac{d \cdot AB}{2} =$

$$= \frac{d \cdot 2AM}{2} = d \cdot AM = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}} = \frac{2m\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}.$$

Questão 4

Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe junto aos dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar esta comissão?

b) Qual a probabilidade da média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

Resposta

a) Como há $1 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 = 12$ jogadores, há $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ maneiras de escolher os

dois jogadores que farão parte da comissão.

b) A média de idade de todos os jogadores é

$$\frac{22 \cdot 1 + 25 \cdot 3 + 26 \cdot 4 + 29 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 32 \cdot 1}{12} =$$

$$= 27 \text{ anos.}$$

Sendo $x \geq y$ as idades de dois jogadores, a média dessas idades é menor que a média das idades de todos os jogadores se, e somente se,

$$\frac{x+y}{2} < 27 \Leftrightarrow x+y < 54.$$

Temos, então, os seguintes casos:

- Ambos os jogadores têm menos de 27 anos. Nesse caso, $x < 27$ e $y < 27 \Rightarrow x+y < 54$. Assim, como há $1 + 3 + 4 = 8$ jogadores nessas

condições, temos $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ maneiras de

escolher os dois jogadores;

- Um jogador tem 29 anos. Nesse caso, $x = 29$ e devemos ter $x+y < 54 \Leftrightarrow y < 54 - 29 \Leftrightarrow y < 25 \Leftrightarrow y = 22$. Portanto, como há 1 jogador de 29 anos e 1 jogador de 22 anos, há somente 1 maneira de escolher os dois jogadores;

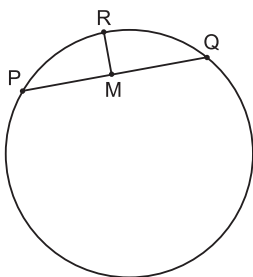
- Um jogador tem 31 anos. Nesse caso, $x = 31$ e $x+y < 54 \Leftrightarrow y < 54 - 31 \Leftrightarrow y < 23 \Leftrightarrow y = 22$. Visto que há 2 jogadores de 31 anos e 1 jogador de 22 anos, há $2 \cdot 1 = 2$ maneiras de escolher os dois jogadores;

- Um jogador tem 32 anos. Nesse caso, $x = 32$ e $x+y < 54 \Leftrightarrow y < 54 - 32 \Leftrightarrow y < 22$, o que não é possível.

Logo a probabilidade pedida é $\frac{28 + 1 + 2}{66} = \frac{31}{66}$.

Questão 5

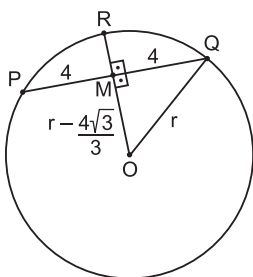
Na figura a seguir, M é o ponto médio da corda \overline{PQ} da circunferência e $PQ = 8$. O segmento \overline{RM} é perpendicular a \overline{PQ} e $RM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Calcule:

- a) O raio da circunferência.
- b) A medida do ângulo $\widehat{PÔQ}$, onde O é o centro da circunferência.

Resposta



a) Sendo M ponto médio da corda \overline{PQ} , temos que \overline{OM} é perpendicular a \overline{PQ} , de modo que O, M e R são colineares. Se o raio da circunferência é r, temos $OM = r - \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Assim, aplicando o

Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle OMQ$, temos:

$$\left(r - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4^2 = r^2 \Leftrightarrow r = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

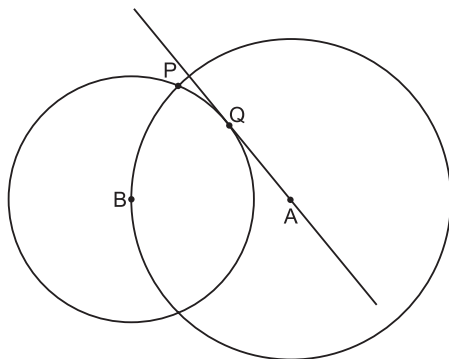
b) Como $\triangle MOP \cong \triangle MOQ$ (caso LLL), temos $m(\widehat{PÔQ}) = 2 \cdot m(\widehat{MÔQ})$. No $\triangle MOQ$, temos

$$\text{sen}(\widehat{MÔQ}) = \frac{4}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m(\widehat{MÔQ}) = 60^\circ.$$

Logo $m(\widehat{PÔQ}) = 120^\circ$.

Questão 6

Na figura a seguir, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é $\frac{5}{4}$ do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta \overleftrightarrow{AQ} é tangente à circunferência menor no ponto Q. Calcule:



- a) $\cos \widehat{A\hat{B}Q}$
- b) $\cos \widehat{A\hat{B}P}$
- c) $\cos \widehat{Q\hat{B}P}$

Resposta

Seja $BQ = r$. Então $AB = \frac{5}{4}r$.

a) O $\triangle ABQ$ é retângulo em Q. Então $\cos(\widehat{A\hat{B}Q}) = \frac{r}{\frac{5}{4}r} = \frac{4}{5}$.

b) $AP = AB = \frac{5}{4}r$ e $BP = r$. Da lei dos cossenos segue que:

$$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2 \cdot AB \cdot BP \cdot \cos(\widehat{A\hat{B}P}) \Leftrightarrow \frac{25}{16}r^2 =$$

$$= \frac{25}{16}r^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}r \cdot r \cdot \cos(\widehat{A\hat{B}P}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cos(\widehat{A\hat{B}P}) = 1 \Leftrightarrow \cos(\widehat{A\hat{B}P}) = \frac{2}{5}.$$

c) Temos que $\widehat{Q\hat{B}P} = \widehat{A\hat{B}P} - \widehat{A\hat{B}Q}$.

Logo $\cos(\widehat{Q\hat{B}P}) = \cos(\widehat{A\hat{B}P} - \widehat{A\hat{B}Q}) = \cos(\widehat{A\hat{B}P}) \cdot \cos(\widehat{A\hat{B}Q}) + \text{sen}(\widehat{A\hat{B}P}) \cdot \text{sen}(\widehat{A\hat{B}Q})$.(*)

Da relação fundamental, temos:

- $\text{sen}(\widehat{A\hat{B}P}) = \frac{\sqrt{21}}{5}$;

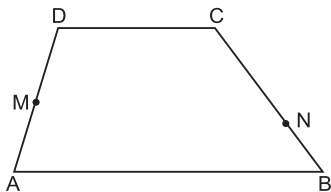
- $\text{sen}(\widehat{A\hat{B}Q}) = \frac{3}{5}$.

Substituindo em (*) temos:

$$\cos(\widehat{Q\hat{B}P}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$$

Questão 7

No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado \overline{AD} ; N está sobre o lado \overline{BC} e $2BN = NC$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que $DC = 10$. Calcule AB.



Resposta

Como $AM = MD$ e a distância de N até \overline{AD} é a altura relativa às bases AM e MD dos triângulos ANM e DNM , estes têm mesma área.

Os quadriláteros $ABNM$ e $CDMN$ têm mesma área, logo área $ABNM =$ área $CDMN \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{área } ANM + \text{área } ABN = \\ &= \text{área } DNM + \text{área } CDN \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{área } ABN = \text{área } CDN \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{AB \cdot BN \cdot \text{sen}(\hat{A}BN)}{2} = \\ &= \frac{DC \cdot NC \cdot \text{sen}(\hat{D}CN)}{2} \Leftrightarrow AB \cdot BN \cdot \text{sen}(\hat{A}BN) = \\ &= 10 \cdot 2BN \cdot \text{sen}(\hat{D}CN) \Leftrightarrow AB = \frac{20 \cdot \text{sen}(\hat{D}CN)}{\text{sen}(\hat{A}BN)}. \end{aligned}$$

Os ângulos $\hat{A}BN$ e $\hat{D}CN$ são suplementares e, portanto, têm senos iguais. Deste modo, $AB = 20$.

Questão 8

Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\frac{z+i}{1+iz} = 2$?

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\frac{z+i}{1+iz}$ é um número real.

Resposta

Supondo $z \neq i$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{z+i}{1+iz} = 2 &\Leftrightarrow z+i = 2(1+iz) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-2i)z = 2-i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$V = \left\{ \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right\}$$

$$\text{b) } \frac{z+i}{1+iz} \in R \Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = \overline{\left(\frac{z+i}{1+iz} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+i}{1+iz} = \frac{\bar{z}-i}{1-\bar{z}i} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z+i)(1-\bar{z}i) = (1+zi)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z - z\bar{z}i + i + \bar{z} = \bar{z} - i + z\bar{z}i + z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

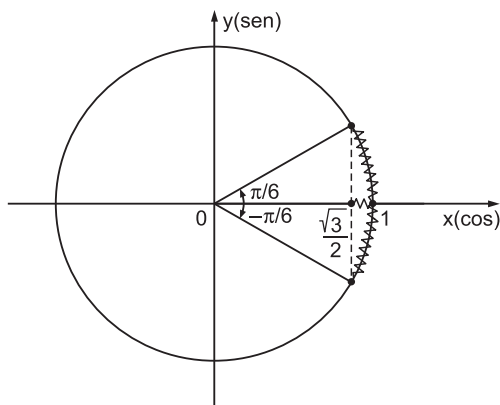
Assim, o conjunto pedido consiste dos números complexos z de módulo igual a 1, exceto $z = i$.

Questão 9

Determine os valores de x no intervalo $]0, 2\pi[$ para os quais $\cos x \geq \sqrt{3} \text{sen } x + \sqrt{3}$.

Resposta

$$\begin{aligned} \cos x \geq \sqrt{3} \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \cdot \text{sen } x &\geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen } x &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } x &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} &\leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} &+ 2k\pi, k \in Z \end{aligned}$$

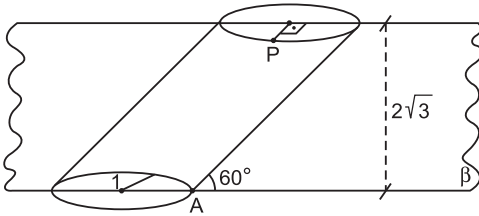


Logo, como x está no intervalo $]0, 2\pi[$, $k = 1$ e $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$, ou seja, $V = \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right]$.

Questão 10

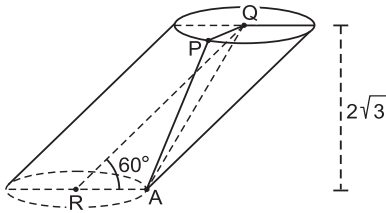
Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um

ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



Resposta

Sendo Q e R centros das bases superior e inferior, respectivamente, concluímos que o eixo \overline{QR} pertence ao plano β e forma 60° com o raio \overline{RA} .



$$\text{Logo } \frac{2\sqrt{3}}{QR} = \text{sen } 60^\circ \Leftrightarrow QR = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4.$$

No ΔAQR , aplicando a lei dos co-senos, temos:

$$QA^2 = QR^2 + RA^2 - 2 \cdot QR \cdot RA \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow QA^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

Como $\overline{PQ} \perp \beta$, concluímos que ΔPQA é retângulo em Q. Logo $PQ^2 + QA^2 = PA^2$, ou seja:

$$1 + 13 = PA^2 \Leftrightarrow PA = \sqrt{14}$$