

Questão 21

Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

- a) 20% b) 22% c) 24%
d) 26% e) 28%

alternativa D

No início, há $18\% \cdot 30 = 0,18 \cdot 30 = 5,4$ litros de álcool na mistura. Quando completarmos o tanque, a mistura resultante deve conter $20\% \cdot 40 = 0,20 \cdot 40 = 8$ litros de álcool.

Logo a porcentagem de álcool na nova mistura que será acrescentada deve ser de $\frac{8 - 5,4}{40 - 30} = 26\%$.

Questão 22

Um estacionamento cobra R\$ 6,00 pela primeira hora de uso, R\$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R\$ 320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

- a) 25 b) 26 c) 27 d) 28 e) 29

alternativa C

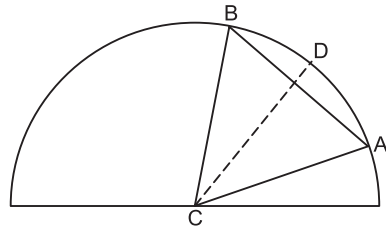
Seja n o número de usuários no dia, serão cobradas n primeiras horas e $80 - n$ horas adicionais. Assim, para que o estacionamento obtenha lucro,

$$6n + 3(80 - n) > 320 \Leftrightarrow n > \frac{80}{3} \Leftrightarrow n \geq 27$$

ou seja, o número mínimo de usuários é 27.

Questão 23

Em uma semicircunferência de centro C e raio R , inscreve-se um triângulo equilátero ABC . Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $\hat{A}CB$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda AD é:



- a) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $R\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ d) $R\sqrt{\sqrt{3} - 1}$
e) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$

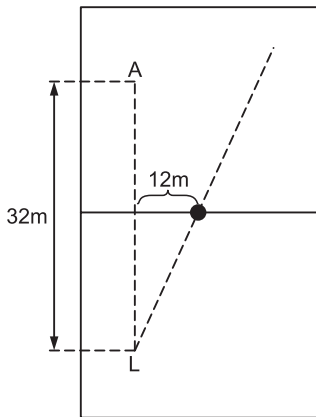
alternativa A

Como \overrightarrow{CD} é bissetriz do ângulo $\hat{A}CB$, $m(\hat{A}CD) = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$. O triângulo ACD é isósceles, com $CA = CD = R$. Aplicando a lei dos co-senos temos:
 $AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cdot CA \cdot CD \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow AD^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow AD = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Questão 24

Um lateral L faz um lançamento para um atacante A , situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima

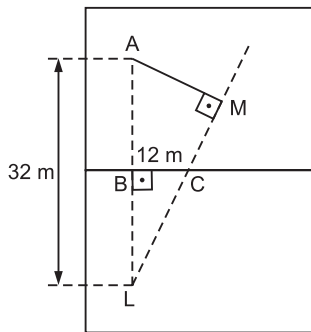
que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



- a) 18,8m
- b) 19,2m
- c) 19,6m
- d) 20m
- e) 20,4m

alternativa B

A distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola é MA , tal que $\overline{MA} \perp \overline{LM}$.



Sejam B e C os pontos onde \overline{LA} e \overline{LM} cruzam a linha do meio de campo, respectivamente. Como LA é paralelo à lateral do campo, BC é perpendicular a LA . E uma vez que a linha do meio de campo está à mesma distância dos dois jogadores, $LB = BA = 16$ m. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle LBC$: $LC^2 = LB^2 + BC^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow LC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ m.}$$

Como $m(\widehat{BLC}) = m(\widehat{MLA})$ e $m(\widehat{LBC}) = m(\widehat{LMA})$, pelo caso AA temos $\triangle LBC \sim \triangle MLA$ e assim:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{BC}{MA} \Leftrightarrow \frac{20}{32} = \frac{12}{MA} \Leftrightarrow MA = 19,2 \text{ m}$$

Questão 25

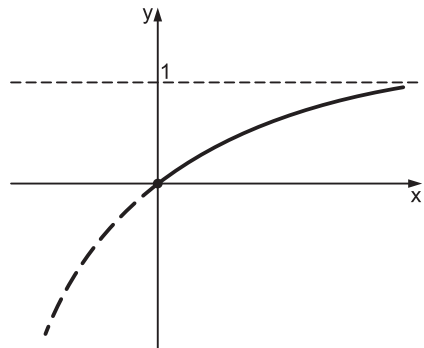
Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

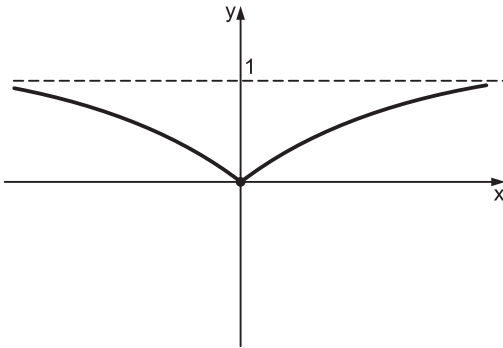
alternativa C

Temos $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$.

Para $x \geq 0$, $f(x) = 1 - 2^{-x}$, cujo gráfico que pode ser representado por:



Para $x \leq 0$, $f(x) = 1 - 2^x$, cujo gráfico é o da curva acima refletido em relação ao eixo y . Assim o gráfico de $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:



Questão 26

Um número racional r tem representação decimal da forma $r = a_1 a_2 a_3$ onde $1 \leq a_1 \leq 9$, $0 \leq a_2 \leq 9$, $0 \leq a_3 \leq 9$. Supondo-se que:

- a parte inteira de r é o quádruplo de a_3 ,
 - a_1, a_2, a_3 estão em progressão aritmética,
 - a_2 é divisível por 3,
- então a_3 vale:

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 9

alternativa E

Sendo x a razão da PA, temos $a_1 = a_2 - x$ e $a_3 = a_2 + x$.

Como a parte inteira de r é o quádruplo de a_3 , $10a_1 + a_2 = 4a_3 \Leftrightarrow 10(a_2 - x) + a_2 = 4(a_2 + x) \Leftrightarrow a_2 = 2x$ e, assim, $a_1 = x$ e $a_3 = 3x$.

Sendo $a_2 = 2x$ divisível por 3, x é múltiplo de 3, ou seja, $x = 3t$, $t \in \mathbb{N}$.

Portanto $a_3 = 3x = 9t$ e $0 \leq a_3 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq 9t \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$.

Se $t = 0$, $x = 0$ e $a_1 = 0$, o que não convém pois $1 \leq a_1 \leq 9$. Logo $t = 1$ e $a_3 = 9t = 9$.

Questão 27

Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

- a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $4 - \sqrt{3}$ c) $2 + 2\sqrt{3}$
 d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) $2 + 4\sqrt{3}$

alternativa D

Para $x > 2$, temos $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_{4^{1/2}}(x - 2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow 2 \log_4(x - 2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_4 \frac{(x - 2)^2}{x} = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Questão 28

Uma matriz real A é ortogonal se $AA^t = I$, onde I indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de A . Se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogo-

nal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

alternativa E

A é ortogonal se e somente se

$$A \cdot A^t = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + x^2 = 1 \text{ e } \frac{y}{2} + xz = 0 \text{ e } y^2 + z^2 = 1 \right) \Leftrightarrow$$

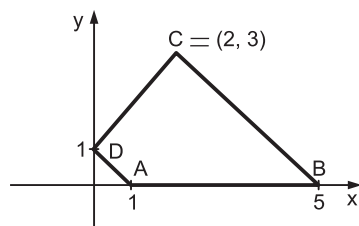
$$\Leftrightarrow \left(x^2 = \frac{3}{4} \text{ e } z = \frac{-y}{2x} \text{ e } y^2 + \frac{y^2}{4x^2} = 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 = \frac{3}{4} \text{ e } z = \frac{-y}{2x} \text{ e } y^2 = \frac{3}{4} \right).$$

Assim $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$.

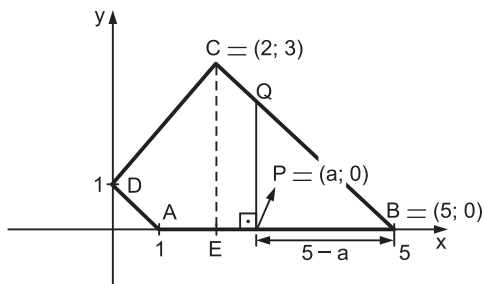
Questão 29

Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero ABCD, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado AB e passando pelo ponto $P = (a, 0)$. O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:



- a) $\sqrt{5} - 1$ b) $5 - 2\sqrt{2}$
 c) $5 - \sqrt{2}$ d) $2 + \sqrt{5}$
 e) $5 + 2\sqrt{2}$

alternativa B



Os coeficientes angulares de \vec{AD} , \vec{BC} e \vec{CD} são, respectivamente, $m_{\vec{AD}} = \frac{1-0}{0-1} = -1$, $m_{\vec{BC}} = \frac{3-0}{2-5} = -1$ e $m_{\vec{CD}} = \frac{3-1}{2-0} = 1$. Logo $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$, $\vec{CD} \perp \vec{AD}$ e $m(\widehat{ABC}) = 45^\circ$. Portanto o quadrilátero ABCD é um trapézio de bases

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2} \text{ e}$$

$$AD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ e altura}$$

$$CD = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Deste modo, a área de ABCD é:

$$\left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2\sqrt{2} = 8$$

Considerando que a área de BCE é $\frac{3 \cdot 3}{2} > 4$, temos $a > 2$. Logo, sendo BPQ um triângulo retângulo isósceles,

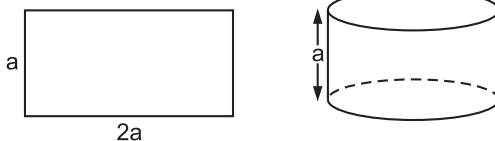
$$\text{área}(BPQ) = 4 \Leftrightarrow \frac{(5-a)^2}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 5 - 2\sqrt{2}.$$

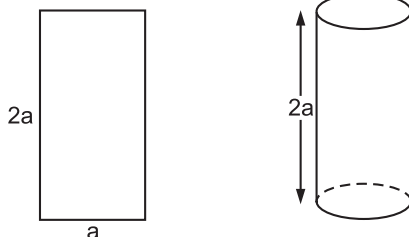
Questão 30

Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e $2a$, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir.

barril do tipo A



barril do tipo B



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

- a) $V_A = 2V_B$ b) $V_B = 2V_A$
 c) $V_A = V_B$ d) $V_A = 4V_B$
 e) $V_B = 4V_A$

alternativa A

O comprimento da circunferência da base do cilindro do tipo A é $2a$. Logo o raio da base desse cilindro é $R_A = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}$. De forma análoga,

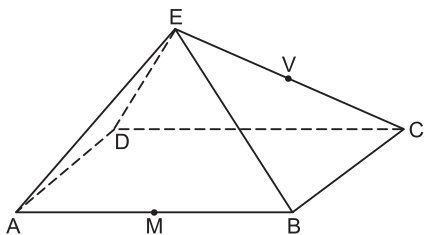
$R_B = \frac{a}{2\pi}$ é o raio da base do cilindro do tipo B.

$$\text{Deste modo temos } \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \cdot a}{\pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot 2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Leftrightarrow V_A = 2 \cdot V_B.$$

Questão 31

A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta \overline{AB} e V é o ponto médio da aresta \overline{EC} , então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



- a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3

alternativa B

Considere as figuras a seguir:

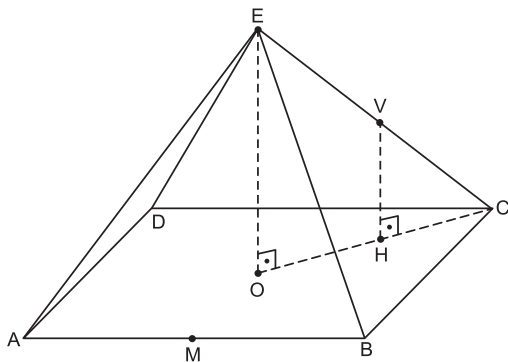


figura 1

base

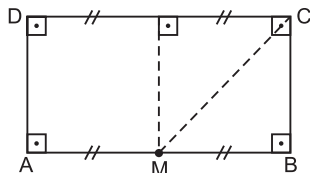


figura 2

Sejam \overline{EO} a altura da pirâmide de base ABCD e vértice E e \overline{VH} a altura da pirâmide de base AMCD e vértice V. Como $m(\widehat{EOC}) = m(\widehat{VHC})$ e $m(\widehat{OCE}) =$

$= m(\widehat{HCV})$, pelo caso AA, $\triangle EOC \sim \triangle VHC$. Já que V é ponto médio de \overline{EC} , $VH = \frac{1}{2} \cdot EO$ e, conforme a figura 2, sendo M o ponto médio de \overline{AB} , $\text{Área}(AMCD) = \frac{3}{4} \cdot \text{Área}(ABCD)$.

Temos:

$$\begin{aligned} \text{Volume}_{VAMCD} &= \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(AMCD) \cdot VH = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \text{Área}(ABCD) \cdot \frac{1}{2} \cdot EO = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(ABCD) \cdot EO = \\ &= \frac{3}{8} \cdot 4 = 1,5 \end{aligned}$$

Questão 32

Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

- a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

alternativa C

Como todas as três empresas devem ser contratadas, uma delas receberá 2 trabalhos. Há $\binom{3}{1}$

maneiras de escolher tal empresa e $\binom{4}{2}$ maneiras

de escolher quais serão seus 2 trabalhos. Finalmente, temos 2! maneiras de distribuir os trabalhos restantes. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, os trabalhos podem ser atribuídos de $\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 36$ maneiras distintas.