

Questão 1

O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2.

Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

Resposta

O número total de gols marcados na primeira rodada é $5 + 3 + 1 + 4 + 0 + 2 = 15$. Sendo n o número total de gols marcados na segunda rodada, para que a média de gols nas duas rodadas torne-se 20% maior que a da primeira rodada, devemos ter

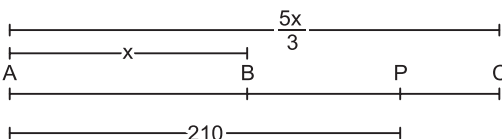
$$\frac{15 + n}{6 + 5} = \frac{15}{6} \cdot 1,2 \Leftrightarrow n = 18$$

Questão 2

Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

Resposta

Seja x a distância, em km, entre A e B. Assim, a distância entre B e C é $\frac{2}{3}x$ e a distância entre A e C é $x + \frac{2}{3}x = \frac{5x}{3}$, conforme mostra a figura a seguir:



Como a distância entre P e B é $210 - x$ e entre P e C é $\frac{5x}{3} - 210$, temos:

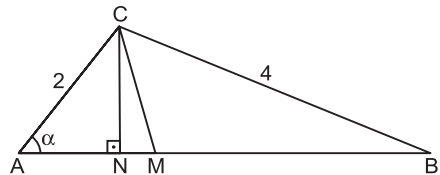
$$\frac{5x}{3} - 210 = (210 - x) - 20 \Leftrightarrow x = 150 \text{ km}$$

A distância que o morador de B deve percorrer é igual à distância entre P e B, ou seja, $210 - 150 = 60$ km.

Questão 3

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = 2$. Sejam M e N os pontos de \overline{AB} tais que \overline{CM} é a bissetriz relativa ao ângulo \widehat{ACB} e \overline{CN} é a altura relativa ao lado AB. Determinar o comprimento de \overline{MN} .

Resposta



Seja $AM = x$. Pelo teorema da bissetriz interna,

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BC} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5 - x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Seja $m(\widehat{CAB}) = \alpha$, pela lei dos co-senos aplicada ao triângulo ABC,

$$\cos \alpha = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{13}{20} \text{ e}$$

$$AN = AC \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{13}{20} = \frac{13}{10}$$

$$\text{Portanto } MN = AM - AN = \frac{5}{3} - \frac{13}{10} = \frac{11}{30}$$

Questão 4

Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e \bar{z} indica o conjugado do número complexo z .

- a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.
 b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Resposta

Seja $z = a + bi$, a, b reais. Assim,

$$z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + bi)^2 = \alpha(a + bi) + (\alpha - 1)(a - bi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 2a\alpha - a + bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2a\alpha - a \\ 2ab = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2a\alpha - a \\ \left(a = \frac{1}{2} \text{ ou } b = 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a = \frac{1}{2} \text{ e } b^2 = \frac{3}{4} - \alpha\right) \\ \text{ou} \\ (b = 0 \text{ e } a^2 = (2\alpha - 1)a) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a = \frac{1}{2} \text{ e } b^2 = \frac{3}{4} - \alpha\right) \\ \text{ou} \\ (a = 0 \text{ e } b = 0) \text{ ou } (a = 2\alpha - 1 \text{ e } b = 0) \end{cases} (*)$$

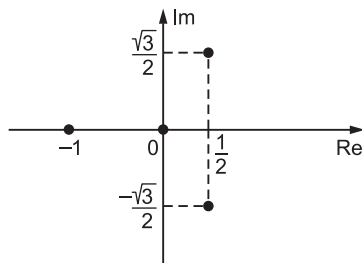
a) A equação admite quatro raízes distintas se, e somente se, a equação $b^2 = \frac{3}{4} - \alpha$ admite duas raízes reais distintas e $2\alpha - 1 \neq 0$, ou seja, $\frac{3}{4} - \alpha > 0$ e $\alpha \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{4}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

b) Para $\alpha = 0$,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a = \frac{1}{2} \text{ e } b^2 = \frac{3}{4}\right) \\ \text{ou} \\ (a = 0 \text{ e } b = 0) \text{ ou } (a = -1 \text{ e } b = 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a = \frac{1}{2} \text{ e } b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } \left(a = \frac{1}{2} \text{ e } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ (a = 0 \text{ e } b = 0) \text{ ou } (a = -1 \text{ e } b = 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = 0$ ou $z = -1$, cujas representações no plano complexo estão a seguir:



Questão 5

O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1 . Determinar

- a) o valor de m .
 b) as raízes de p .

Resposta

Sejam x_1 e x_2 as raízes cujo produto é -1 e x_3 a outra raiz. Pelas relações entre coeficientes e raízes, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a} \Leftrightarrow (-1) \cdot x_3 = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x_3 = \frac{3}{2}$.

Logo $\frac{3}{2}$ é uma das raízes do polinômio. Aplicando então o algoritmo de Briot-Ruffini,

$\frac{3}{2}$	2	-m	4	3
	2	3 - m	$\frac{17}{2} - \frac{3}{2}m$	$\frac{63}{4} - \frac{9}{4}m$

a) Como o resto da divisão deve ser igual a zero,

$$\frac{63}{4} - \frac{9}{4}m = 0 \Leftrightarrow m = 7.$$

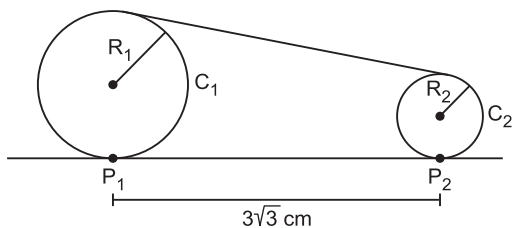
b) Temos que x_1 e x_2 são as raízes de

$$Q(x) = 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Portanto as raízes de p são $\frac{3}{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$.

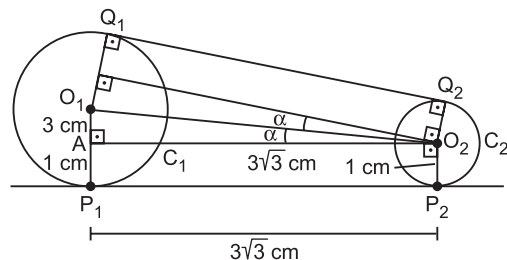
Questão 6

A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2 , respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.



Resposta

Observe a figura a seguir, na qual O_1 e O_2 são os centros de C_1 e C_2 , respectivamente.



No triângulo retângulo AO_1O_2 , $\text{tg}\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$.

Assim, o menor arco $\widehat{P_2Q_2}$ tem medida angular $360^\circ - 2 \cdot 30^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 120^\circ$. Como $m(\widehat{AO_1O_2}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, o maior arco $\widehat{Q_1P_1}$ tem medida angular $360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$.

Logo a correia, que é formada pelos segmentos congruentes $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ e pelos arcos $\widehat{P_2Q_2}$ (menor) e $\widehat{Q_1P_1}$ (maior), tem comprimento

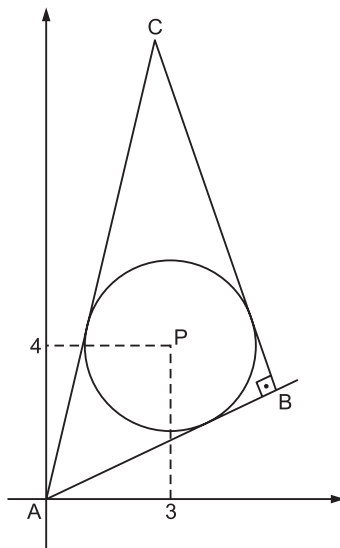
$$2 \cdot 3\sqrt{3} + \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4 = 6\sqrt{3} + 6\pi \text{ cm.}$$

Questão 7

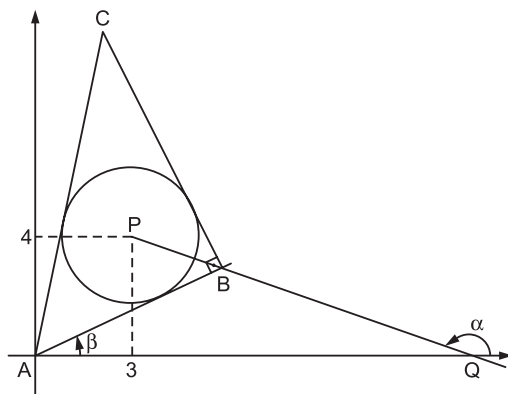
Na figura a seguir, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo \hat{B} o ângulo reto.

Sabendo-se que $A = (0, 0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3, 4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

- a) do vértice B.
- b) do vértice C.



Resposta



a) O ponto P é o incentro de ABC, logo \overleftrightarrow{BP} é a bissetriz de \hat{ABC} , de modo que $m(\hat{ABP}) = 45^\circ$ e $m(\hat{ABQ}) = 135^\circ$.

Seja $a = \text{tg}\alpha$ o coeficiente angular de \vec{BP} . Como o coeficiente angular de $\vec{AB} : x - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x \text{ é } \text{tg}\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \beta + 135^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 135^\circ \Rightarrow \text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}135^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} = -1 \Leftrightarrow \frac{a - \frac{1}{2}}{1 + a \cdot \frac{1}{2}} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}. \text{ Logo } \vec{BP} \text{ admite como equação}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow x + 3y - 15 = 0.$$

Uma vez que B pertence à reta $y = \frac{1}{2}x$,

$B = \left(b; \frac{b}{2}\right)$ e, sendo B um ponto de \vec{BP} ,

$$b + 3 \cdot \frac{b}{2} - 15 = 0 \Leftrightarrow b = 6 \text{ e } B = (6; 3).$$

b) O raio da circunferência inscrita em ABC é

$$d(P; \vec{AB}) = \frac{|3 - 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}.$$

Como a reta \vec{AC} passa pela origem e não coincide com \vec{AB} , admite equação $y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$, com $m \neq \frac{1}{2}$.

A distância de P a \vec{AC} é igual a $\sqrt{5}$, logo

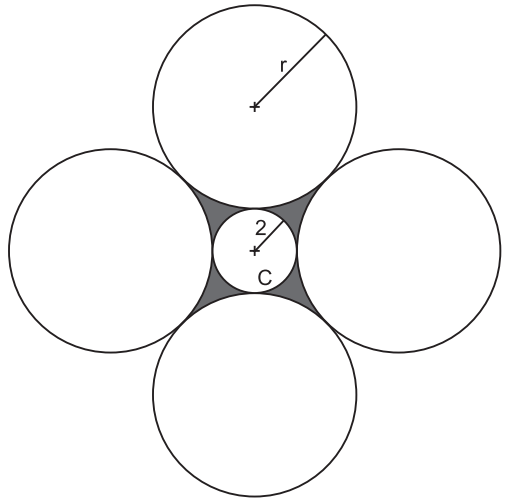
$$\frac{|m \cdot 3 - 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{11}{2}. \text{ E assim, } C = \left(c; \frac{11c}{2}\right).$$

A reta \vec{BC} , perpendicular a \vec{AB} , admite equação

$$y - 3 = \frac{-1}{\frac{1}{2}}(x - 6) \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0. \text{ Como C}$$

pertence a essa reta, $2c + \frac{11c}{2} - 15 = 0 \Leftrightarrow c = 2$ e $C = (2; 11)$.



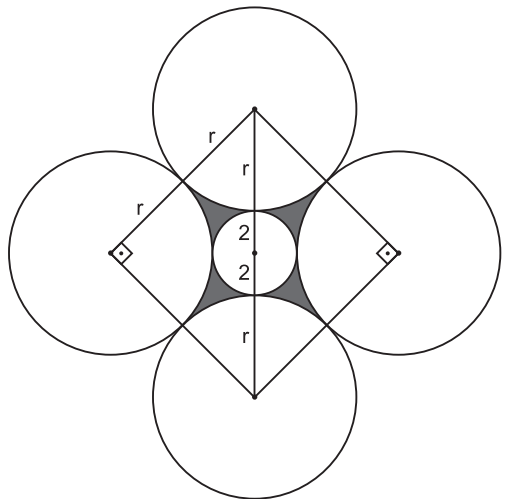
Se o raio de C é igual a 2, determinar

a) o valor de r.

b) a área da região destacada.

Resposta

a) Pela simetria da figura, os centros das circunferências externas formam um quadrado de lado $2r$ e diagonal $2r + 4$.



$$\text{Logo } 2r + 4 = 2r \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2} + 2.$$

b) A área da região destacada é igual à área do quadrado menos a área de um círculo de raio 2 e a de quatro setores circulares de raio r e ângulos centrais de 90° , isto é, $(2 \cdot (2\sqrt{2} + 2))^2 - \pi \cdot$

$$\begin{aligned} & \cdot 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2} + 2)^2 = \\ & = 48 + 32\sqrt{2} - (16 + 8\sqrt{2})\pi. \end{aligned}$$

Questão 8

Na figura a seguir, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.

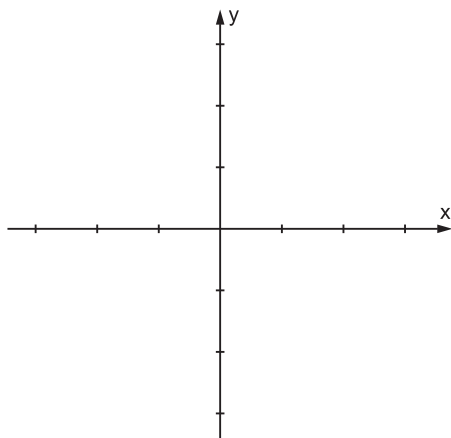
Questão 9

Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboçar, no plano cartesiano representado a seguir, os gráficos de f e de g quando $m = \frac{1}{4}$ e $m = 1$.

b) Determinar as raízes de $f(x) = g(x)$ quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m , o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

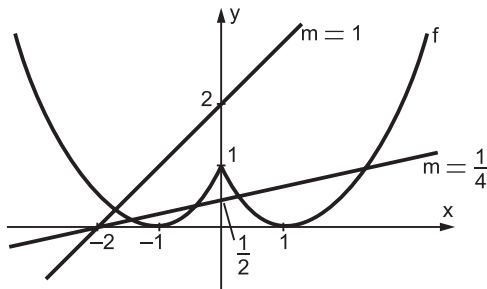


Resposta

$$a) f(x) = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{se } x \geq 0 \\ (x + 1)^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Para $m = \frac{1}{4}$, $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$. O gráfico de g é, então, uma reta passando por $(0; \frac{1}{2})$ e $(-2; 0)$.

Para $m = 1$, $g(x) = x + 2$. O gráfico de g é, então, uma reta passando por $(0; 2)$ e $(-2; 0)$. Assim, podemos esboçar os gráficos:



b) Para $m = \frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

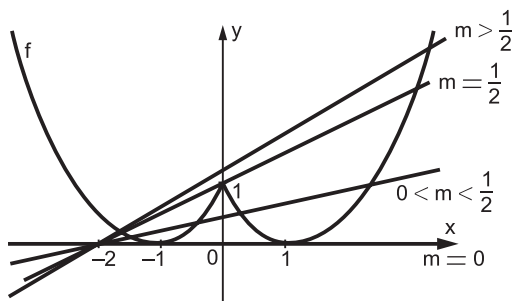
Assim $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 2x = \frac{x}{2} \text{ e } x \geq 0 \right) \\ \text{ou} \\ \left(x^2 + 2x = \frac{x}{2} \text{ e } x \leq 0 \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

c) Variando m , $g(x) = mx + 2m$ representa o feixe de retas com coeficiente angular $m \geq 0$ passando por $(-2; 0)$. As raízes de $f(x) = g(x)$ são as abscissas dos pontos onde os gráficos de f e g se cortam.

Analisando o gráfico esboçado a seguir:

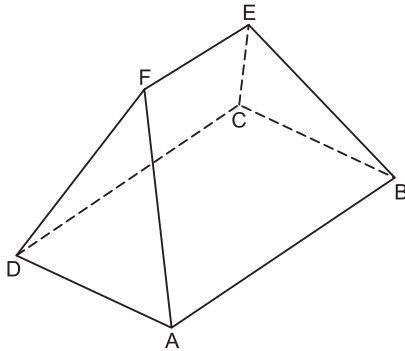


- para $m = 0$, a equação possui 2 raízes reais, -1 e 1 ;
- para $m = \frac{1}{2}$, a equação possui 3 raízes reais, uma delas igual a zero;
- para $0 < m < \frac{1}{2}$, a equação possui 4 raízes reais;
- para $m > \frac{1}{2}$, a equação possui 2 raízes reais.

Questão 10

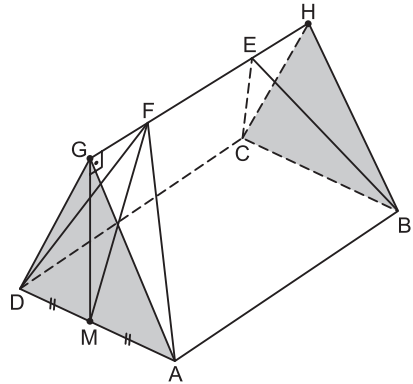
No sólido S representado na figura a seguir, a base $ABCD$ é um retângulo de lados $AB = 2\ell$ e $AD = \ell$; as faces $ABEF$ e $DCEF$ são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento \overline{EF} tem comprimento ℓ .

Determinar, em função de ℓ , o volume de S .



Resposta

Sejam G e H pontos sobre os prolongamentos do segmento \overline{EF} tais que $FG = EH = \frac{\ell}{2}$, de modo que os quadriláteros $ABHG$ e $CDGH$ são retângulos.



O volume do sólido S é igual ao volume do prisma reto de base ADG e altura AB menos o das duas pirâmides congruentes $FADG$ e $EBCH$.

Seja M o ponto médio de \overline{AD} . Como AFD é um triângulo equilátero, $FM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo FGM , $GM =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}.$$

Assim o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\ell - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\ell}{2} = \\ & = \frac{5\sqrt{2}}{12} \cdot \ell^3. \end{aligned}$$