Questão 21

Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi

a) 110 b) 120 c) 130
d) 140 e) 150

alternativa C

Seja n, $n \in N$, o número de frascos de detergentes no aroma limão por caixa. Então havia $n - 2$ detergentes no aroma coco e, portanto, $n + n - 2 = 24 \Leftrightarrow n = 13$.
Logo o número de frascos entregues no aroma limão foi $10 \cdot 13 = 130$.

Questão 22

O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é

a) 37 b) 36 c) 35 d) 34 e) 33

alternativa A

Como $31^2 = 961$ e $32^2 = 1\,024$, o menor quadrado de um inteiro positivo maior do que 987 é 1 024, ou seja, o número procurado é $1\,024 - 987 = 37$.

Questão 23

O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos respectivamente em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que

(1) os valores sejam proporcionais às idades;

(2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.

O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é:

a) 1/1/2013 b) 1/1/2014 c) 1/1/2015
d) 1/1/2016 e) 1/1/2017

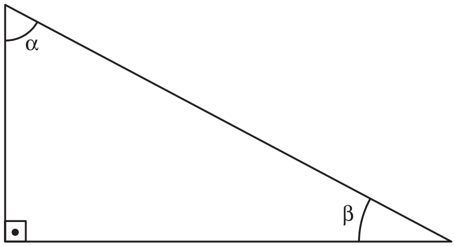
alternativa D

Como ambos os filhos nasceram em 1º de janeiro, o primeiro dia será 1º de janeiro de um certo ano $2000 + x$, $x \geq 4$.
Temos que o mais velho receberá um valor proporcional a x, o mais novo um valor proporcional a $x - 4$ e, além disso, $x - 4 \geq 0{,}75 \cdot x \Leftrightarrow x \geq 16$.
Assim, o primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é 1/1/2016.

Questão 24

Sabe-se que $x = 1$ é raiz da equação $(\cos^2\alpha)x^2 - (4\cos\alpha\,\text{sen}\beta)x + \frac{3}{2}\text{sen}\beta = 0$, sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo.

Pode-se então afirmar que as medidas de α e β são, respectivamente,



a) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{3\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{8}$

alternativa D

Temos que α e β são ângulos agudos complementares, logo $\text{sen}\beta = \cos\alpha > 0$. Sabemos ainda que 1 é raiz da equação dada. Assim:

$$(\cos^2\alpha)x^2 - (4\cos\alpha\,\text{sen}\beta)x + \frac{3}{2}\text{sen}\beta = 0 \Leftrightarrow$$

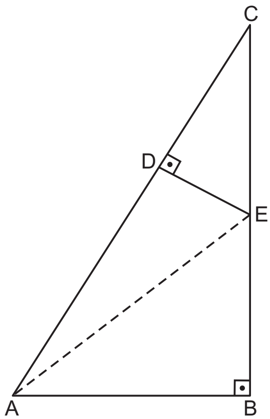
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha + \frac{3}{2}\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ e } \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Questão 25

Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

alternativa C

Na figura, $AC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Como os triângulos retângulos ABC e EDC têm o ângulo $\hat{C}$ em comum, são semelhantes e, assim:

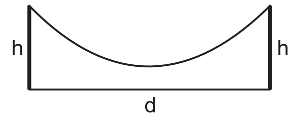
$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3} - BE} = \frac{1}{\frac{BE}{2}} \Leftrightarrow BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABE, $AE = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Questão 26

Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.
Suponha também que
(i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;
(ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.

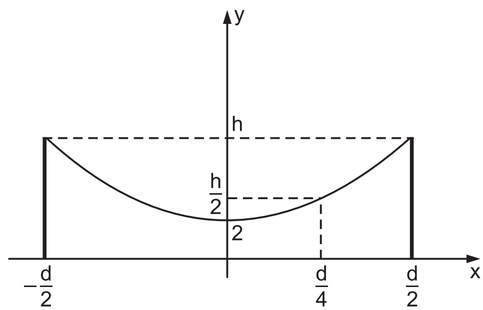
Se $h = 3\frac{d}{8}$, então d vale



a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

alternativa B

Podemos estabelecer o seguinte sistema de coordenadas:



Sendo o fio simétrico em relação ao eixo y, a equação da parábola que o contém é $y = ax^2 + c$. Como os pontos (0; 2), $\left(\frac{d}{4}; \frac{h}{2}\right) = \left(\frac{d}{4}; \frac{3d}{16}\right)$ e $\left(\frac{d}{2}; h\right) = \left(\frac{d}{2}; \frac{3d}{8}\right)$ pertencem à parábola,

$$\left|\begin{array}{l} 2 = a \cdot 0^2 + c \\ \frac{3d}{16} = a\left(\frac{d}{4}\right)^2 + c \Leftrightarrow \\ \frac{3d}{8} = a\left(\frac{d}{2}\right)^2 + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = 2 \\ \frac{3d}{4} = \frac{ad^2}{4} + 8 \\ \frac{3d}{8} = \frac{ad^2}{4} + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = 2 \\ \frac{3d}{4} - \frac{3d}{8} = 8 - 2 \Leftrightarrow \\ \frac{3d}{8} = \frac{ad^2}{4} + 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = 2 \\ d = 16 \\ a = \frac{1}{16} \end{array}\right.$$

Questão 27

Participam de um torneio de voleibol 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada.
Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª fase.
Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é

a) 39 b) 41 c) 43 d) 45 e) 47

alternativa E

Na 1ª fase, em cada chave, os times jogam entre si uma única vez. Portanto cada par de times corresponde a um jogo, ou seja, o número de jogos por chave é $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ *e o total de jogos na 1ª fase é* $4 \cdot 10 = 40$.
Para a 2ª fase classificam-se os 2 melhores de cada chave, totalizando 8 times. Como em cada jogo um time é eliminado, são necessários mais $8 - 1 = 7$ *jogos para se chegar ao campeão.*
O número de jogos para se apurar o campeão do torneio é $40 + 7 = 47$.

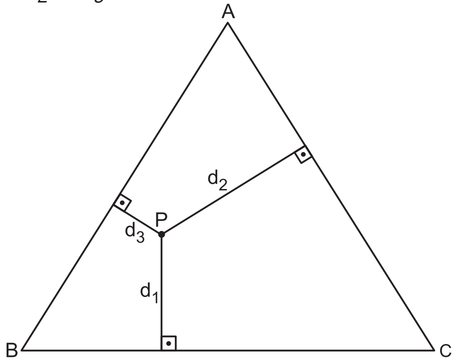
Questão 28

A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é

a) $5\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$
d) $8\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{3}$

alternativa B

Consideremos na figura a seguir o triângulo eqüilátero ABC de lado ℓ *e altura* h *e um ponto P em seu interior distando* d_1, d_2 *e* d_3 *dos lados tal que* $d_1 + d_2 + d_3 = 9$.



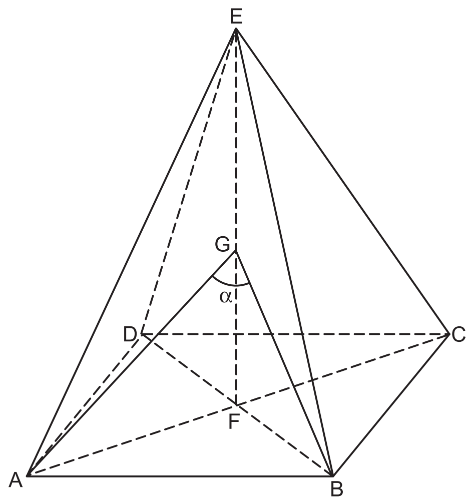
Como a soma das áreas dos triângulos PBC, PAC e PAB é igual à área do triângulo ABC, temos:

$$\frac{\ell \cdot d_1}{2} + \frac{\ell \cdot d_2}{2} + \frac{\ell \cdot d_3}{2} = \frac{\ell \cdot h}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = d_1 + d_2 + d_3 \Leftrightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 9 \Leftrightarrow \ell = 6\sqrt{3}$$

Questão 29

A figura abaixo mostra uma pirâmide reta de base quadrangular ABCD de lado 1 e altura EF = 1. Sendo G o ponto médio da altura $\overline{EF}$ e α a medida do ângulo $A\hat{G}B$, então cosα vale



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

alternativa B

Supondo a base ABCD da pirâmide um quadrado de lado 1, temos $AF = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos AFG e BFG, temos* $(AG)^2 = (GF)^2 + (AF)^2 =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = (BG)^2.$$

Pela lei dos co-senos no ΔAGB:

$$(AB)^2 = (AG)^2 + (BG)^2 - 2 \cdot AG \cdot BG \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AB)^2 = 2 \cdot (AG)^2 - 2 \cdot (AG)^2 \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 = 2 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Obs.: do enunciado pode-se concluir apenas que a base da pirâmide é um losango de lado 1. Sendo $d_1 = AF$ *e* $d_2 = BF$ *as medidas das metades* *das diagonais do losango,* $d_1^2 + d_2^2 = 1$, $AG^2 = \frac{1}{4} + d_1^2$, $BG^2 = \frac{1}{4} + d_2^2$ *e*

$$\cos\alpha = \frac{AG^2 + BG^2 - AB^2}{2 \cdot AG \cdot BG} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + d_1^2 + \frac{1}{4} + d_2^2 - 1^2}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + d_1^2\right)\left(\frac{1}{4} + d_2^2\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + 4d_1^2)(5 - 4d_1^2)}}$$

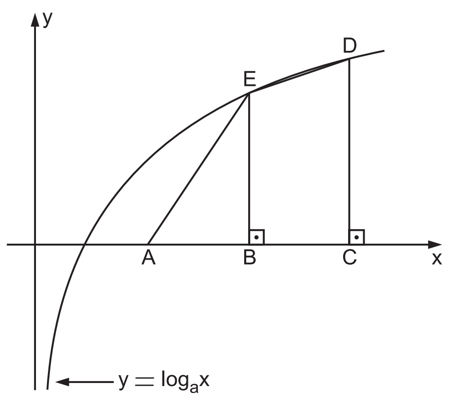
. Sendo $x = 4d_1^2$ *e* $f(x) = (1 + x)(5 - x) = -x^2 + 4x + 5$, *o valor máximo de f é* $-\frac{4^2 - 4(-1) \cdot 5}{4(-1)} = 9$ *e, considerando que* $d_1^2 = 1 - d_2^2$ *e* $d_2 > 0 \Rightarrow 0 < 4d_1^2 < 4$, $f(x) > f(0) = 5$ *e* $f(x) > f(4) = 5$. *Assim,* $5 < f(x) \le 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{f(x)}} < \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \cos\alpha < \frac{\sqrt{5}}{5}$$

. Das alternativas, a única que apresenta um valor possível para $\cos\alpha$ *é a B.*

Questão 30

Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x, 0)$, $C = (x + 1, 0)$ e $A = (x - 1, 0)$. Então, o valor de x, para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE, é



a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{5}$ d) $1 + \sqrt{5}$

e) $\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

alternativa A

A partir do gráfico, $E = (x, \log_a x)$ *e* $D = (x + 1, \log_a(x + 1))$. *Conseqüentemente,*

$$\text{área (ABE)} = \frac{BE \cdot AB}{2} = \frac{\log_a x \cdot 1}{2} = \frac{\log_a x}{2},$$

$$\text{área (BCDE)} = \frac{(BE + CD) \cdot BC}{2} =$$

$$= \frac{(\log_a x + \log_a(x + 1)) \cdot 1}{2} = \frac{\log_a x + \log_a(x + 1)}{2}$$

e, para que a área do trapézio BCDE seja o triplo da área do triângulo ABE,

$$\frac{\log_a x + \log_a(x + 1)}{2} = 3 \cdot \frac{\log_a x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x + 1) = 2\log_a x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \log_a(x + 1) = \log_a x^2 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x + 1 = x^2 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Obs.: como $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

$$A = (x - 1; 0) = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 0\right) \text{ e } \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1,$$

a posição de A indicada na figura está incorreta. Na verdade, A está entre a origem e (1; 0), ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

Questão 31

Sejam a e b números reais tais que:
(i) a, b e a + b formam, nessa ordem, uma PA;
(ii) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.
Então o valor de a é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

alternativa E

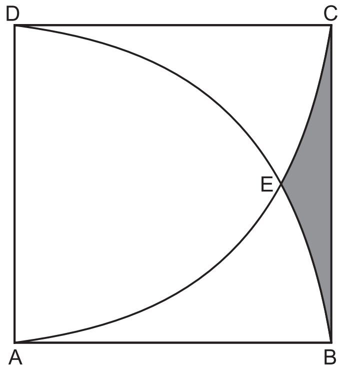
As condições dadas são equivalentes a:

$$\left|\begin{array}{l} a + (a + b) = 2 \cdot b \\ 2^a \cdot 2^b = 16^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = 2a \\ 2^{a+b} = (2^4)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = 2a \\ a + 2a = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = \frac{16}{3} \\ a = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

Questão 32

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferência de raio 1. Logo, a área da região destacada é



a) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

alternativa C

O triângulo ADE é eqüilátero de lado 1. Além disso, $m(B\hat{A}E) = m(C\hat{D}E) = 90^o - 60^o = 30^o$. Logo a área da região destacada é a área de um quadrado de lado 1 menos a soma das áreas de dois setores circulares de raio 1 e ângulo central 30^o com a área de um triângulo eqüilátero de lado 1, ou seja, $1^2 - \left(2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{12} + \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) =$

$= 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.