

## Questão 1

Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R\$ 96,00, e unidades do produto B, pagando R\$ 84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R\$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

### Resposta

Sejam  $x$  e  $26 - x$  ( $0 < x < 26$ ) o número de unidades compradas, respectivamente, dos produtos A e B. Então o valor unitário do produto A é  $\frac{96}{x}$  e do

B é  $\frac{84}{26 - x}$ . O valor unitário de A excede o de B em R\$ 2,00, então:

$$\frac{96}{x} = \frac{84}{26 - x} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 96(26 - x) = 84x + 2x(26 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 116x + 48 \cdot 26 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (12 + 104)x + 12 \cdot 104 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

Portanto a empresa comprou 12 unidades de A e  $26 - 12 = 14$  unidades de B.

## Questão 2

Diz-se que a matriz quadrada A tem **posto 1** se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  para os quais a matriz  $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

### Resposta

Observando a segunda coluna de A, temos que A tem posto 1 se, e somente se:

$$\begin{cases} L_2 = 2L_1 \\ L_3 = L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = 2 \cdot 2 \\ b + c - 3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ b + c - 3a = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 6 \\ -3a + b = 2 - c \\ -2a + b = 3 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

## Questão 3

Uma seqüência de números reais  $a_1, a_2, a_3, \dots$  satisfaz à lei de formação

$$a_{n+1} = 6a_n, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \text{ se } n \text{ é par.}$$

Sabendo-se que  $a_1 = \sqrt{2}$ ,

a) escreva os oito primeiros termos da seqüência.

b) determine  $a_{37}$  e  $a_{38}$ .

### Resposta

a) Sendo  $a_1 = \sqrt{2}$ , vem que:

$$a_2 = 6a_1 \Leftrightarrow a_2 = 6\sqrt{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 \Leftrightarrow a_3 = 2\sqrt{2}$$

$$a_4 = 6a_3 \Leftrightarrow a_4 = 12\sqrt{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{3}a_4 \Leftrightarrow a_5 = 4\sqrt{2}$$

$$a_6 = 6a_5 \Leftrightarrow a_6 = 24\sqrt{2}$$

$$a_7 = \frac{1}{3}a_6 \Leftrightarrow a_7 = 8\sqrt{2}$$

$$a_8 = 6a_7 \Leftrightarrow a_8 = 48\sqrt{2}$$

b) Sejam  $b_n = a_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$  e  $c_n = a_{2n}$ ,  $n \geq 1$ .

$$\text{Temos } b_{n+1} = a_{2(n+1)-1} = a_{2n+1} = \frac{1}{3}a_{2n} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot a_{2n-1} = 2b_n \text{ e } c_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2} =$$

$$= 6a_{2n+1} = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot a_{2n} = 2c_n. \text{ Assim, } b_n \text{ e } c_n \text{ são}$$

progressões geométricas de razão 2 e termos iniciais  $b_1 = a_1 = \sqrt{2}$  e  $c_1 = a_2 = 6\sqrt{2}$ .

Logo

$$a_{37} = a_{2 \cdot 19 - 1} = b_{19} = \sqrt{2} \cdot 2^{19-1} = 2^{18} \cdot \sqrt{2}$$

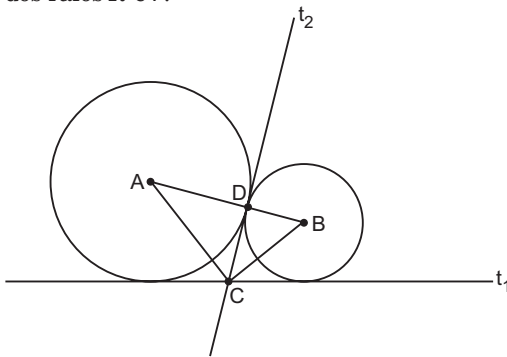
$$\text{e } a_{38} = a_{2 \cdot 19} = 6\sqrt{2} \cdot 2^{19-1} = 2^{19} \cdot 3\sqrt{2}.$$

**Questão 4**

A figura representa duas circunferências de raios  $R$  e  $r$  com centros nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto  $D$ . Suponha que:

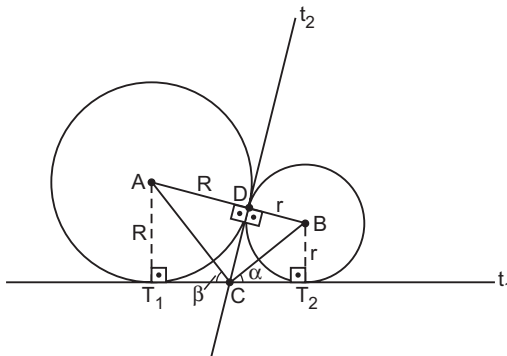
- a) As retas  $t_1$  e  $t_2$  são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto  $C$ .
- b) A reta  $t_2$  é tangente às circunferências no ponto  $D$ .

Calcule a área do triângulo  $ABC$ , em função dos raios  $R$  e  $r$ .



**Resposta**

Consideremos a figura a seguir:



Como  $\overline{CT_2}$  e  $\overline{CD}$  são tangentes à circunferência de centro  $B$  e  $\overline{CD}$  e  $\overline{CT_1}$  são tangentes à circunferência de centro  $A$ , temos  $CT_2 = CD = CT_1$ . Assim, pelo caso LAL,  $\Delta CT_2B \cong \Delta CDB$ ,  $\Delta CT_1A \cong \Delta CDA$  e portanto  $m(\widehat{B\hat{C}D}) = m(\widehat{B\hat{C}T_2}) = \alpha$  e  $m(\widehat{A\hat{C}D}) = m(\widehat{A\hat{C}T_1}) = \beta$ .

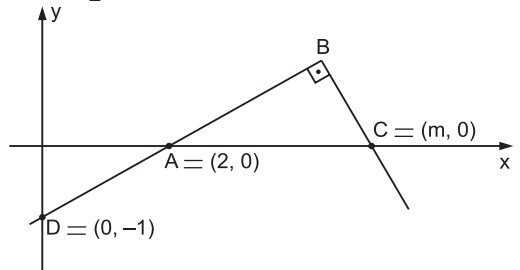
Como  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ ,  $m(\widehat{B\hat{C}A}) = \alpha + \beta = 90^\circ$  e, pelas relações métricas no triângulo retângulo  $ABC$ ,  $(CD)^2 = R \cdot r \Leftrightarrow CD = \sqrt{R \cdot r}$ .

Logo a área do  $\Delta ABC$  é

$$\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{(R+r) \cdot \sqrt{R \cdot r}}{2}.$$

**Questão 5**

Na figura abaixo  $A$ ,  $B$  e  $D$  são colineares e o valor da abscissa  $m$  do ponto  $C$  é positivo. Sabendo-se que a área do triângulo retângulo  $ABC$  é  $\frac{5}{2}$ , determine o valor de  $m$ .



**Resposta**

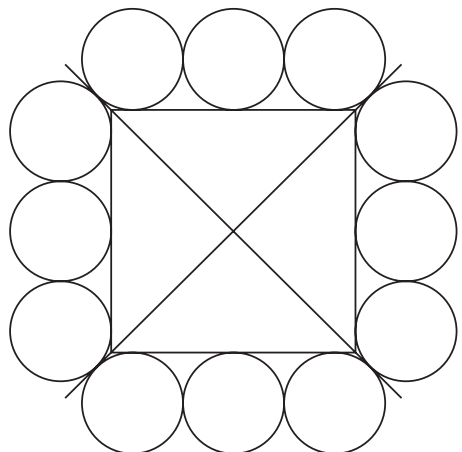
Seja  $O$  a origem. Pelo caso AA, os triângulos  $AOD$  e  $ABC$  são semelhantes.

Como a área de  $AOD$  é  $\frac{OA \cdot OD}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ , a

razão de semelhança é  $\frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{\text{área } ABC}{\text{área } AOD}} \Leftrightarrow$

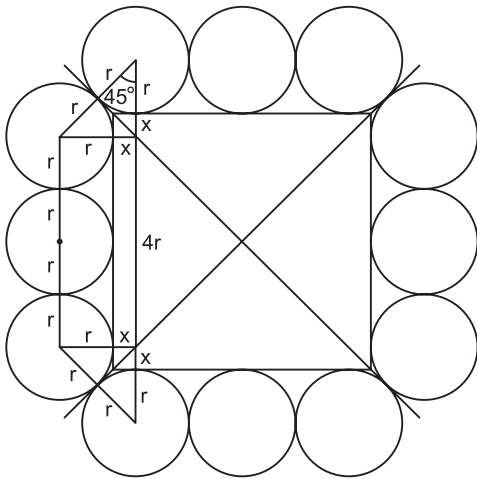
$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{5}{1}} \Leftrightarrow m = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

**Questão 6**



Na figura acima, as 12 circunferências têm todas o mesmo raio  $r$ ; cada uma é tangente a duas outras e ao quadrado. Sabendo-se que cada uma das retas suporte das diagonais do quadrado tangencia quatro das circunferências (ver figura), e que o quadrado tem lado  $2\sqrt{7}$ , determine  $r$ .

**Resposta**



Na figura anterior, por Pitágoras, temos:

$$2(r+x)^2 = 4r^2 \Leftrightarrow r+x = r\sqrt{2} \Leftrightarrow x = r\sqrt{2} - r.$$

A medida do lado do quadrado é:

$$4r + 2x = 2\sqrt{7}, \text{ logo } 4r + 2(r\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow r\sqrt{2} + r = \sqrt{7} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{14} - \sqrt{7}$$

**Questão 7**

Determine todos os valores de  $x$  pertencentes ao intervalo  $[0, 2\pi]$  que satisfazem a equação  $\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x$ .

**Resposta**

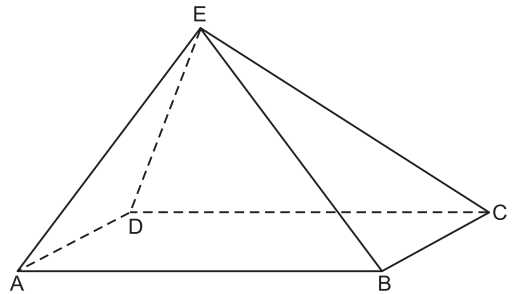
$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{\cos 2x}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $V = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ .

**Questão 8**

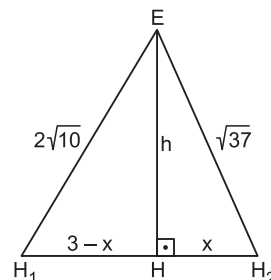
A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados  $AB = 4$  e  $BC = 3$ . As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente,  $4\sqrt{10}$  e  $2\sqrt{37}$ . Calcule o volume da pirâmide.



**Resposta**

Sejam  $h_1$  e  $h_2$  as alturas dos triângulos ABE e CDE relativas às bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Então  $\frac{4 \cdot h_1}{2} = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow h_1 = 2\sqrt{10}$  e  $\frac{4 \cdot h_2}{2} = 2\sqrt{37} \Leftrightarrow h_2 = \sqrt{37}$ .

Se  $H_1$  e  $H_2$  são os pés das alturas  $h_1$  e  $h_2$ , então  $H_1H_2 \parallel \overline{BC}$  e  $H_1H_2 = 3$  cm, pois o plano  $(EH_1H_2)$  é perpendicular à base ABCD e a  $\overline{AB}$ . Consideremos assim o  $\triangle EH_1H_2$ , que contém a altura EH da pirâmide relativa à base ABCD.



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $EHH_2$  e  $EHH_1$  :

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = (\sqrt{37})^2 \\ h^2 + (3-x)^2 = (2\sqrt{10})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ h = 6 \end{cases}$$

O volume da pirâmide é  $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ .

### Questão 9

Seja  $f(x) = ax^2 + (1-a)x + 1$ , onde  $a$  é um número real diferente de zero.

Determine os valores de  $a$  para os quais as raízes da equação  $f(x) = 0$  são reais e o número  $x = 3$  pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

#### Resposta

	$x_1$	3	$x_2$	
sinal de $f(x)$	ma	ca	ma	

Para  $a \neq 0$ , as raízes  $x_1$  e  $x_2$  da equação  $f(x) = 0$  são reais e o número  $x = 3$  pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes se, e somente se, o sinal de  $f(3)$  é contrário ao de  $a$  ou 3 é raiz da equação, ou seja,  $a \cdot f(3) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a \cdot (a \cdot 3^2 + (1-a) \cdot 3 + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (6a + 4) \leq 0 \Leftrightarrow a \cdot \left( a - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a < 0.$$

### Questão 10

Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos.

#### Resposta

Há dois casos a considerar:

1) Nos dois primeiros lançamentos saem números iguais.

A probabilidade disso ocorrer é  $\frac{1}{6}$ . Nos dois últimos lançamentos pode sair qualquer um dos outros 5 resultados possíveis, o que ocorre com probabilidade  $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ .

2) Nos dois primeiros lançamentos saem números diferentes.

A probabilidade disso ocorrer é  $\frac{5}{6}$ . Nos dois últimos lançamentos pode sair qualquer um dos outros 4 resultados possíveis, o que ocorre com probabilidade  $\left(\frac{4}{6}\right)^2$ .

Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{105}{216} = \frac{35}{72}$$